Einige Bemerkungen über vollkommene und mehrfach vollkommene Zahlen

Herrn Professor Dr. Hans Robert Müller zum achtzigsten Geburtstag

Kanold, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 42, 1990/91,
S.49-55

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Einige Bemerkungen über vollkommene und mehrfach vollkommene Zahlen

Herrn Professor Dr. Hans Robert Müller zum achtzigsten Geburtstag

Von **Hans-Joachim Kanold,** Braunschweig

(Eingegangen am 25. 4. 1991)

Eines der ältesten ungelösten mathematischen Probleme ist die Frage nach der Existenz unendlich vieler vollkommener Zahlen. In dem Buch von Paulo Ribenboim „The Book of Prime Number Records“ (Springer, New York, 1988) steht auf Seite 85: „All the results that I have indicated about the problem of the existence of odd perfect numbers represent a considerable amount of work, sometimes difficult and delicate. Yet I believe the problem stands like an unconquerable fortress.“

Mir scheint eine modifizierte Vermutung angreifbar zu sein. Wir denken uns eine natürliche Zahl n in der kanonischen Darstellung

$$(1)\qquad n = \prod_{j=1}^{\omega(n)} p_j^{\alpha_j};\ p_j \in \mathbb{P};\ \alpha_j \in \mathbb{N};\ \max_{j=1}^{\omega(n)} \alpha_j = A(n)$$

gegeben. Ferner sei die Summe aller (positiven) Teiler von n bezeichnet durch

$$(2)\qquad \sigma(n) = \sum_{t|n} t.$$

Dann lautet die Vermutung, mit einer beliebig großen, festen Schranke S

$$(3)\qquad \{n, \sigma(n) \equiv 0(n);\ A(n) < S\}$$

ist eine endliche Menge.

Wir wollen hier einige Sonderfälle beweisen und Bemerkungen anknüpfen.

Nehmen wir in (3) die Voraussetzung

$$(4)\qquad \omega(n) < S$$

hinzu, dann ist die Vermutung richtig, es gilt also

$$(5)\qquad \{n;\ \sigma(n) \equiv 0(n);\ A(n) < S;\ \omega(n) < S\}$$

ist eine endliche Menge.

Beweis. $\sigma(n) \equiv 0(n)$ bedeutet, es gibt $v \in \mathbb{N}$ so, daß

$$(6)\qquad \sigma(n) = vn$$

erfüllt ist. Dabei ist $v=1$ nur für $n=1$.

Wir untersuchen nun

$$(7)\qquad 2 \leq v < \prod_{j=1}^{\omega(n)} \frac{p_j}{p_j-1}\,.$$

Es gilt der einfache

Hilfssatz. *Für* $\omega \geq 18$ *folgt* $v \leq \dfrac{\omega-4}{2}$.

Beweis. $\omega = 20$ führt zu

$$(8)\qquad v < \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\cdot\frac{71}{70} < 8;\ v \leq 7.$$

Also ist für $18 \leq \omega \leq 20$ der Hilfssatz richtig.

Für $\omega \geq 20$ und $\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdots\dfrac{p_\omega}{p_\omega-1} < \dfrac{\omega-4}{2}$ folgt aber auch

$$\frac{2}{1}\cdots\frac{p_{\omega+1}}{p_{\omega+1}-1} < \frac{\omega-4}{2}\cdot\frac{p_{\omega+1}}{p_{\omega+1}-1} < \frac{\omega-3}{2}\,.$$

Eine triviale Folgerung aus dem Hilfssatz, den wir später in der vorliegenden Gestalt verwenden werden, besagt, daß $\omega(n) < S$ auch $v = v(n) < S$ nach sich zieht. Nun folgt die Richtigkeit von (5) aus früheren Ergebnissen [1]. Den folgenden Satz werden wir auf (5) zurückführen.

Satz 1. $\{n;\ \sigma(n) \equiv 0(n);\ A(n) < S;\ \sum_{\alpha_j \equiv 0(2)} \alpha_j < S\}$ *ist eine endliche Menge.*

Beweis. Wir haben als zusätzliche Voraussetzung, daß in (1) die Summe der <u>geraden</u> Exponenten beschränkt bleibt. Wir schreiben (6) ausführlich so

$$(9)\qquad \prod_{\substack{\alpha_j \equiv 1(2)\\ j=1}}^{b_1} (1+p_j)\,(1+p_j^2+\cdots+p_j^{\alpha_j-1}) \prod_{\substack{\alpha_j \equiv 0(2)\\ j=b_1+1}}^{\omega} (1+p_j+p_j^2+\cdots+p_j^{\alpha_j})$$

$$= v \prod_{1}^{b_1} p_j^{\alpha_j}\cdot\prod_{b_1+1}^{\omega} p_j^{\alpha_j}.$$

Nun sei

$$(10)\qquad 2^{\xi}\| v;\ \xi \leq \left[\frac{\log v}{\log 2}\right].$$

Aus

$$(11)\quad 2^{b_1-1} \Big| \prod_{j=1}^{b_1} (1+p_j)$$

folgt sogleich

$$(12)\quad b_1 \leq A(n)+1+\xi \leq A(n)+1+\frac{\log v}{\log 2} \leq S+\frac{\log \omega}{\log 2}.$$

Nun ist nach Voraussetzung auch

$$(13)\quad 2(\omega-b_1) \leq \prod_{\alpha_j \equiv 0(2)} \alpha_j < S;\ \omega(n) < b_1+\frac{S}{2},\ \frac{\omega}{\log \omega} \leq \frac{1{,}5\,S}{\log \omega}+0{,}5,$$

also $\omega(n)$ beschränkt.

Satz 2. *$\{n;\ \sigma(n) \equiv 0(n);\ A(n) < S;\ \underset{j=b_1+1}{\overset{\omega(n)}{\text{g.g.T.}}}\ (\alpha_j+1) > 1\}$ ist eine endliche Menge.*

Beweis. Wir haben als zusätzliche Voraussetzung, daß in (1) die um 1 vermehrten geraden Exponenten α_j einen gemeinsamen Primteiler t besitzen. Nach (5) brauchen wir wiederum nur zu zeigen, daß $\omega(n)$ beschränkt bleibt. Es ist nun

$$(14)\quad \prod_{\substack{j=b_1+1\\ \alpha_j \equiv 0(2)}}^{\omega(n)} (1+p_j+p_j^2+\cdots+p_j^{t-1}) \ \Big|\ v \cdot \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j \equiv 1(2)}}^{b_1} p_j^{\alpha_j} \cdot \prod_{\substack{j=b_1+1\\ \alpha_j \equiv 0(2)}}^{\omega(n)} p_j^{\alpha_j}.$$

Wenn $\omega(n)$ nicht beschränkt bleibt, dann gibt es beliebig viele j mit $b_1+1 \leq j \leq \omega(n)$; $p_j \not\equiv 1(t)$. Dagegen gibt es höchstens endlich viele p_j mit $1 \leq j \leq \omega(n)$ und $p_j \equiv 1(t)$. Das liefert einen Widerspruch, weil $1+p_j+\cdots+p_j^{t-1}$ außer t nur Primteiler $\equiv 1(t)$ besitzen kann.

Satz 3. *Die Menge der Zahlen n mit $\sigma(n) \equiv 0(n)$; $A(n) < 4$ ist genau die Menge $\{1;\ 2 \cdot 3;\ 2^2 \cdot 7;\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19;\ 2^3 \cdot 3 \cdot 5;\ 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13\}$.*

Beweis. Der Fall $v = 2$ erledigt sich sofort durch die folgenden Bemerkungen. Die einzigen geraden vollkommenen Zahlen mit $A(n) < 4$ sind $n = 2 \cdot 3$ und $n = 2^2 \cdot 7$. Nach Steuerwald [2] ist für eine ungerade vollkommene Zahl die Bedingung $A(n) \geq 4$ notwendig. Wir dürfen daher von jetzt an

$$(15)\quad 3 \leq v$$

voraussetzen.

Statt (9) diskutieren wir

$$(16)\quad \prod_{j=1}^{b_1}(1+p_j)\cdot\prod_{j=b_1+1}^{b_1+b_2}(1+p_j+p_j^2)\cdot\prod_{j=b_1+b_2+1}^{b_1+b_2+b_3}(1+p_j)\,(1+p_j^2)=$$

$$v.\prod_{1}^{b_1}p_j\cdot\prod_{b_1+1}^{b_1+b_2}p_j^2\cdot\prod_{b_1+b_2+1}^{b_1+b_2+b_3}p_j^3$$

mit

(16') $0\le b_i$ für $i=1,2,3;\ b_1+b_2+b_3=\omega=\omega(n)$.

Statt (10) haben wir

(17) $2^\xi \parallel v;\ 3^\eta \parallel v;\ 2^\mu \parallel n;\ 3^\nu \parallel n;\ 0\le\mu,\nu\le 3.$

Ferner sei γ die Anzahl der (gleichen oder verschiedenen) Primteiler $\equiv 1(3)$ von v. Die rechte Seite von (16) ist genau durch $2^{\xi+\mu}$ und durch $3^{\eta+\nu}$ teilbar. Für ungerade n (also $\mu=0$) erhalten wir

$$(18)\quad b_1+2b_3\le\xi\le\left[\frac{\log v}{\log 2}\right]$$

und nach dem Hilfssatz

$$(18')\quad b_1+2b_3\le\left[\frac{\log\frac{\omega-4}{2}}{\log 2}\right]\text{ für }\omega\ge 18.$$

Für $\mu=1$ folgt $b_1-1+2b_3\le\xi+1$, also

(19) $b_1+2b_3\le\xi+2.$

Für $\mu=2$ ergibt sich ebenfalls die Abschätzung (19). Außerdem

(20) $7\mid v\cdot n.$

Schließlich führt $\mu=3$ zu $3\cdot 5\mid v\cdot n$ und $b_1+2(b_3-1)\le\xi+3$, also

(21) $b_1+2b_3\le\xi+5$ mit $b_3\ge 1$.

In allen Fällen haben wir

$$(22)\quad b_1+b_3\le\xi+4\ge\begin{cases}\left[\dfrac{\log\frac{\omega-4}{2}}{\log 2}\right]+4 & \text{für }\omega\ge 18\\ 11 & \text{für }\omega<18.\end{cases}$$

Um b_2 nach oben abzuschätzen, beachten wir, daß

$$(23)\quad \prod_{j=b_1+1}^{b_1+b_2}(1+p_j+p_j^2)$$

außer 3 nur Primteiler $\equiv 1(3)$ enthalten kann, und daß $1+p_j+p_j^2$ genau durch 3 (in

1. Potenz) teilbar ist, wenn $p_j \equiv 1(3)$ gilt; außerdem enthält $1+p_j+p_j^2$ immer mindestens einen Primteiler $\equiv 1(3)$. Nun zeigen wir

$$(24)\quad b_2 \leq \gamma + \left[\frac{3}{2}(\eta+\nu)\right] + \begin{cases} b_1+2b_3 \text{ für } \mu<3; \\ b_1+2b_3-2 \text{ für } \mu=3. \end{cases}$$

Höchstens $b_1+\gamma$, bzw. $b_1+\gamma-1$ für $\mu=1$, der $1+p_j+p_j^2$ in (23) sind durch ein p_j mit $1 \leq j \leq b_1$ oder einen Primteiler $\equiv 1(3)$ von v teilbar. Wenn a_1 die Anzahl der übrigen $1+p_j+p_j^2$ ist, welche genau einen Primteiler $\equiv 1(3)$ enthalten, und diesen genau in der 1. Potenz, und a_2 die Anzahl der übrigen $1+p_j+p_j^2$, dann folgt

$$(25)\quad a_1+2a_2 \leq 2(\eta+\nu) + \begin{cases} 3b_3 \text{ für } \mu<3; \\ 3b_3-5 \text{ für } \mu=3. \end{cases}$$

Es gilt aber auch

$$(25')\quad a_1+a_2 \geq \left[\frac{3}{2}(\eta+\nu)\right] + \begin{cases} 2b_3+1 \text{ für } \mu<3; \\ 2b_3-2 \text{ für } \mu=3, \end{cases}$$

wenn (24) <u>nicht</u> erfüllt ist. Hieraus ergibt sich

$$(26)\quad a_2+\eta+\nu+\left[\frac{\eta+\nu}{2}\right]+2b_3+\begin{cases}1\\-2\end{cases} \leq$$

$$2(\eta+\nu)+3b_3+\begin{cases}0\\-5\end{cases} \qquad \text{oder}$$

$$(26')\quad a_2+\left[\frac{\eta+\nu}{2}\right]+\begin{cases}1\\3\end{cases} \leq \eta+\nu+b_3;$$

$$a_1 \geq \eta+\nu+\left[\frac{\eta+\nu}{2}\right]+2b_3+\begin{cases}1\\-2\end{cases} - a_2$$

$$=\eta+\nu+\left[\frac{\eta+\nu}{2}\right]+2b_3+\begin{cases}1\\-2\end{cases} - (\eta+\nu)-b_3+\left[\frac{\eta+\nu}{2}\right]+\begin{cases}1\\3,\end{cases}$$

also

$$(27)\quad a_1 \geq b_3 + \begin{cases} 2\left[\frac{\eta+\nu}{2}\right]+2 \text{ für } \mu<3 \\ 2\left[\frac{\eta+\nu-1}{2}\right]+1 \text{ für } \mu=3 \end{cases} \geq \begin{cases} b_3+\eta+\nu+1 \\ b_3+\eta+\nu. \end{cases}$$

Hieraus folgt nun, daß es eine Primzahl p so geben muß, daß

$$(28)\quad 1+p_j+p_j^2=p;\ 1+p_{j'}+p_{j'}^2=3p \quad \text{mit } b_1+1 \leq j, j' \leq b_1+b_2$$

erfüllt ist. Das führt aber zu dem Widerspruch $p_j=2$, $p_{j'}=4$.

Damit ist (24) bewiesen. Wir haben nun

$$(29)\quad \omega=b_1+b_2+b_3 \leq b_1+b_3+\xi+\gamma+\eta+\nu+\left[\frac{\eta+\nu}{2}\right]$$

$$+\begin{cases} 0 \text{ für } \mu=0; \\ 2 \text{ für } \mu=1,2 \text{ oder} \\ 2 \text{ für } \mu=3 \end{cases}$$

$$(29') \quad \omega \leq 2\xi + \gamma + \eta + \nu + \left[\frac{\eta+\nu}{2}\right] - b_3 + \begin{cases} 0 \text{ für } \mu = 0 \\ 4 \text{ für } \mu \leq 2 \\ 7 \text{ für } \mu = 3. \end{cases}$$

Nach dem Hilfssatz ist für $\omega \geq 18$

$$(30) \quad 2^{\xi+\eta+\gamma} \leq 2^{\xi} \cdot 3^{\eta} \cdot 7^{\gamma} \leq \nu \leq \frac{\omega-4}{2} ;$$

mit (29′) und (30) wird

$$(31) \quad \frac{\omega-4}{2} \leq \frac{\log \frac{\omega-4}{2}}{\log 2} + \frac{\nu-b_3}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\eta+\nu}{2}\right] - \frac{\eta}{2} + \begin{cases} -2 \\ \ \ 0 \\ 3/2 \end{cases} .$$

Damit gewinnen wir eine obere Schranke für ω.

$$(31') \quad \frac{\frac{\omega-4}{2}}{\log \frac{\omega-4}{2}} \leq \frac{1}{\log 2} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\eta}{4}}{\log \frac{\omega-4}{2}} ;$$

$\frac{\omega-4}{2} \geq 7$; die linke Seite von (31′) ist monoton wachsend mit ω, die rechte monoton abnehmend. Mit $x = \frac{\omega-4}{2}$ folgt aus (31′)

$$(32) \quad \frac{x-1{,}75}{\log x} \leq \frac{1}{\log 2} .$$

Für $x \geq 7$, $\omega \geq 18$ folgt der Widerspruch

$$5{,}25 \log 2 < \log 10.$$

Somit dürfen wir beim weiteren Beweise von Satz 3 nach dem Hilfssatz

$$(33) \quad \omega \leq 17; \ \nu \leq 7$$

annehmen. Nach (30) ist $2^{\xi} \cdot 3^{\eta} \cdot 7^{\gamma} \leq 7$.

$\nu = 7$ führt zu $\gamma = 1$, $\xi = \eta = 0$ und nach (29′) zu

$$(34) \quad \omega \leq 1 + \nu + \left[\frac{\nu}{2}\right] - b_3 + 7 \leq 11.$$

Hieraus folgt der Widerspruch

$$(35) \quad 7 = \nu \leq \prod_{p \leq 31} \frac{(1+p)(1+p^2)}{p^3} < 6{,}0448.$$

Von jetzt an haben wir

$$(36) \quad \nu \leq 6; \ \gamma = 0; \ \xi \leq 2; \ \eta \leq 1$$ und nach (29′)

$$(37) \quad \omega \leq 2\xi + \eta + \nu + \left[\frac{\eta+\nu}{2}\right] + 6 \leq 4 + 1 + 3 + 2 + 6 = 16.$$

Eine genauere Abschätzung ergibt

$$(38)\quad \begin{cases} \nu=6 \Rightarrow \xi=\eta=1; \ \omega \leq 3+\nu+\left[\frac{1+\nu}{2}\right]+6 \leq 14; \\ \nu=5 \Rightarrow \xi=\eta=0; \ \omega \leq \nu+\left[\frac{\nu}{2}\right]+6 \leq 10; \\ \nu=4 \Rightarrow \xi=2,\ \eta=0; \ \omega \leq 4+\nu+\left[\frac{\nu}{2}\right]+6 \leq 14; \\ \nu=3 \Rightarrow \xi=0,\ \eta=1; \ \omega \leq 1+\nu+\left[\frac{1+\nu}{2}\right]+6 \leq 12. \end{cases}$$

Beachten wir, daß $\nu=3$ auch $(1+3)(1+3^2)=2^3\cdot 5|\nu n$, also $2|n$ ergibt, dann erhalten wir für ungerade n $(\mu=0)$ nach (29′)

$$(39)\quad \omega \leq 2\xi+\eta+2+\left[\frac{\eta+2}{2}\right] \leq 4+3+1=8$$

und nach (15) den Widerspruch

$$(40)\quad 3 \leq \nu < \frac{13}{9}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22} < 3;$$

also bleibt

$$(41)\quad n \equiv 0(2);\ 1 \leq \mu \leq 3;\ \text{entweder } 3|\nu n \text{ oder } 7|n \text{ oder } 3\cdot 5|\nu n.$$

Durch eine Reihe von Fallunterscheidungen und einfachen Abschätzungen läßt sich zeigen, daß auch $n \equiv 0(3)$ und $\nu \leq 4$ sein muß. Schließlich ergibt sich dann der vollständige Beweis von Satz 3.

Bemerkungen. Betrachten wir die Menge der ungeraden vollkommenen Zahlen

$$n = p^\alpha \cdot \prod_{j=1}^{r} q_j^{2\beta_j} \text{ mit } p \equiv \alpha \equiv 1(4)$$

und setzen wir voraus, daß eine Primzahl t existiert mit

$$t|2\beta_j+1 \quad \text{für } j=1,\ldots,r,$$

dann ist die Menge dieser n endlich, wenn alle Exponenten α beschränkt bleiben. Dagegen ist die Menge der

$$n = p^\alpha q_1^2 \ldots q_{r_1}^2\ q_{r_1+1}^4 \ldots q_{r_1+r_2}^4,$$

auch wenn $\alpha < S$ gilt, mit den vorliegenden Methoden noch nicht als endlich erwiesen.

Literatur

[1] H.-J. Kanold, Über einen Satz von L.E. Dickson II, Math. Ann. 132, 246–255 (1956).
[2] R. Steuerwald, Verschärfung einer notwendigen Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl, S.-B. bayer. Akad. Wiss. math.-naturw. Kl. (1937), 69–72.